Z2576 – 2do. Parcial – 2do. Cuatrimestre 2024

E1) Hallar la circulación del campo $\overline{f}(x,y,z)=(2x^2+y\,,\,z+y\,,\,3)$ a través de la curva frontera de S, siendo S la superficie del cilindro $x^2+z^2=16$ limitada por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=3$. Aplique el teorema del rotor e indique gráficamente el sentido en que decidió recorrer la curva.

E2) Hallar la masa del sólido definido por $3x^2+3y^2\le z$, $x^2+y^2\ge z^2$, sabiendo que la densidad en cada punto del sólido es proporcional a la distacia de dicho punto al plano (xy).

E3) a) Dada la curva $C=\begin{cases}2x^2+y^2=4\\ z-y=2\end{cases}$, parametrizar **la curva completa**. Hallar la circulación del campo $\overline{f}(x,y,z)=(x\,,\,xy\,,\,zy)$ a través del arco de la curva C desde el punto $(0\,,\,2\,,\,4)$ hasta el punto $(0\,,-2\,,\,0)$

b) **De acuerdo con el resultado obtenido en a)** indicar si el campo $\overline{f}$ es conservativo. **Justificar claramente.**

E4) Sea $\overline{f}(x,y)=(x^3\,g'(y)\,,\,x^4\,g(y))$. Hallar $g(y)$ de modo que $\overline{f}$ admita función potencial en R^2, siendo $\overline{f}(1,0)=(2,-4)$. Hallar la función potencial asociada al campo $\overline{f}$.

T1) a) Enunciar el teorema de la divergencia.

b) Analizar qué hipótesis debería cumplir un campo $\overline{f}$ para que $\iint_S rot\,\overline{f}\,\breve{n}\,d\sigma=0$, siendo S una superficie cerrada que cumple con las hipótesis del teorema de la divergencia.

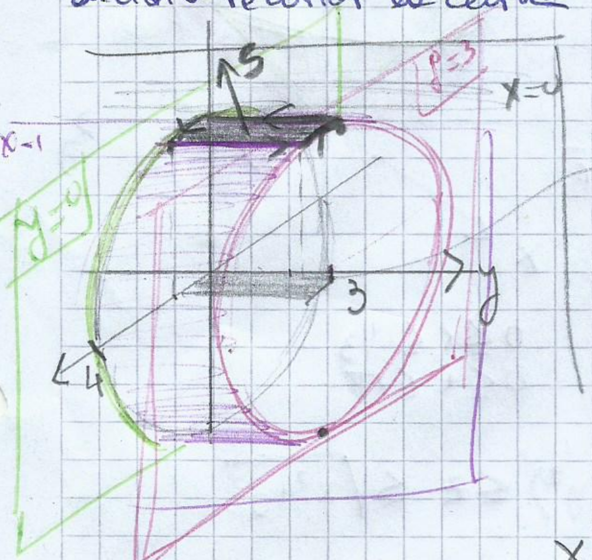
T2) a) Enuncie el teorema de cambio de variables para integrales dobles.

b) A través del cambio de variables definido por $(x,y)=(u+2v\,,\,2u+v)$, la región D del plano (xy) se transforma en la región W del plano (uv). Calcule el área de W sabiendo que el área D=12

AM 2	2° parcial	HOJA N° 1/3 · FECHA 2°C 2024

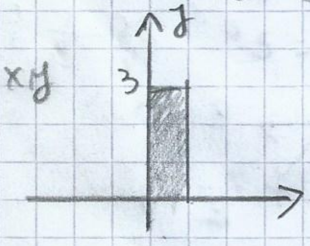
Prof. Campillo

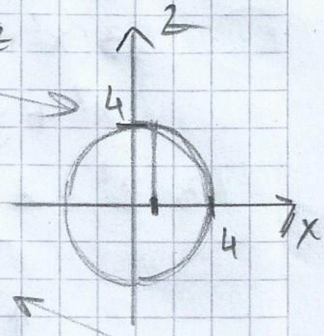
$\boxed{E1}$ Hallar la circulación del campo $\bar f(x,y,z) = (\overset{P}{2x^2+y}, \overset{Q}{z+y}, \overset{R}{3})$ a través de la curva frontera de S, siendo S la sup. del cilindro $x^2+z^2=16$ limitada por los planos $x=0$, $x=1$, $\boxed{y=0}$, $\boxed{y=3}$.
Aplicar el teorema del rotor e indicar, gráficamente, el sentido en que decidió recorrer la curva.



$x^2+z^2=16 \to$ proy en xz

proy en xy





$$G(x,y,z) = x^2+z^2-16$$

$$\hookrightarrow N_S = \frac{\nabla G}{|G'_z|} = \left(\frac{2x}{2z}, 0, \frac{2z}{2z}\right)$$

$$x^2+z^2=16 \xrightarrow{z\geq 0} z = \sqrt{16-x^2}$$

$$\boxed{N_S = \left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}, 0, 1\right)}$$

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 3$$

$$\oint_{C^+} \bar F\, d\bar l = \iint_S \operatorname{rot}(\bar F)\, d\bar s = \iint_S \operatorname{rot}(\bar F)\cdot \breve{n}\, ds = \iint_D \operatorname{rot}(\bar F)\, n\, dx\,dy = *$$

$C = \partial S$ $\qquad$ S_{xy}

$$\bar F = (P,Q,R) \to \operatorname{rot}(\bar F) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) =$$
$$= (0-1,\ 0-0,\ 0-1) \to \operatorname{rot}(\bar F) = (-1,0,-1)$$

$$* = \iint_D (-1,0,-1)\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}},0,1\right) dx\,dy = \int_0^3\int_0^1 -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} - 1\, dx\,dy =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{16-x^2} - x \Big|_0^1 dy = \int_0^3 \sqrt{15} - 1 - \underbrace{\sqrt{16}}_{4} + 0\, dy = -5+\sqrt{15}\underbrace{\int_0^3 dy}_{3}$$

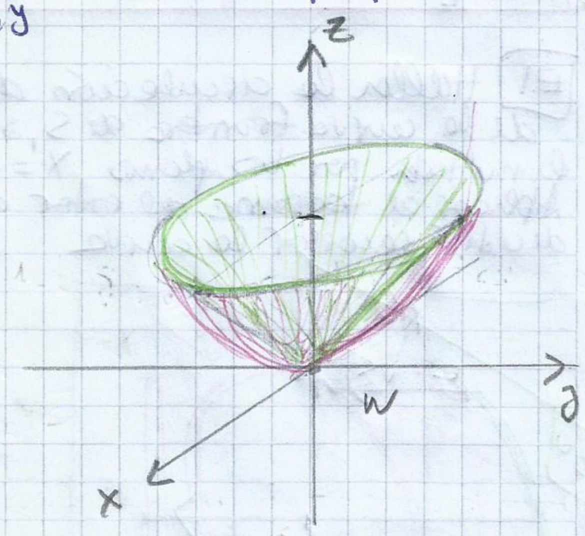
$$\boxed{\oint_{C^+} \bar F\, d\bar l = -15+3\sqrt{15}}$$

$$\left(\sqrt{16-x^2}\right)' = \left((16-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(16-x^2)^{-1/2}(-2x)$$

NOTA

E2 Hallar la masa del sólido definido por $3x^2+3y^2 \leq z$, $x^2+y^2 \geq z^2$ sabiendo que la densidad en cada punto del sólido es proporcional a la distancia de dicho punto al plano x, y

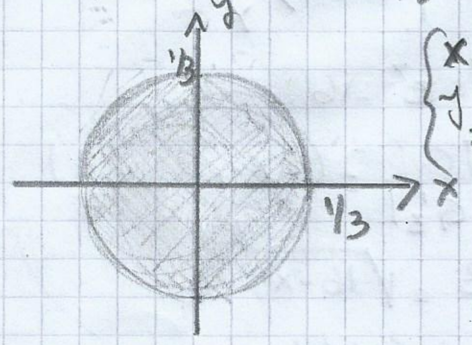
$$\overbrace{3x^2+3y^2}^{\geq 0} \leq z \quad \leftarrow \geq 0$$



Hallo intersección

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2) = z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases} \qquad r = \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot z^2 = z \longrightarrow z = 0$$
$$\qquad \searrow z = 1/3$$



$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq 1/3 \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$3(x^2+y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2 = r^2 \qquad \downarrow$$

$$3r^2 \leq z \leq r$$

$$\delta(x,y,z) = \underset{\uparrow}{k}\,|z| \qquad z \geq 0$$

proporcional

$$\text{Masa} = \iiint_W \delta(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{1/3}\int_{3r^2}^{r} \underset{\text{Jacob.}}{r} \cdot k\, z \; dz\,dr\,dt =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{1/3} r\,\frac{z^2}{2}\Big|_{3r^2}^{r} dr\,dt = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{1/3} \underbrace{r\,(r^2-9r^4)}_{r^3-9r^5}\, dr\,dt =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} - \frac{9r^6}{6}\Big|_0^{1/3} dt = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{972}\,dt = \frac{k\pi}{972}$$

$$\boxed{\text{Masa} = \frac{\pi k}{972}}$$

NOTA

AM2	2° parcial Prof. Campillo	HOJA N° 2/3 FECHA 2°C 2024

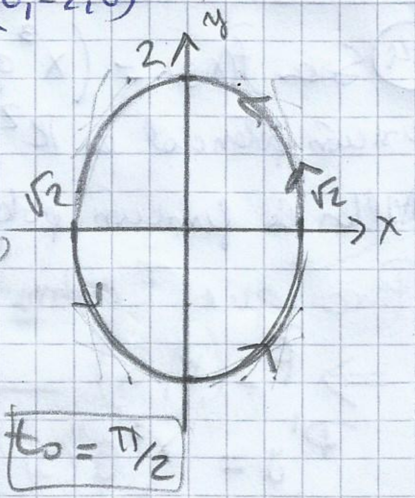
E3 a) Dada la curva: $C: \begin{cases} 2x^2+y^2=4 \\ z-y=2 \end{cases}$ parametrizar la curva completa.

Hallar la circulación del campo $\bar{F}(x,y,z) = (x, xy, zy)$ a través del arco de curva desde el punto $(0,2,4)$ hasta $(0,-2,0)$

$$2x^2+y^2=4 \rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$

elipse: $a=\sqrt{2}$, $b=2$

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos(t) \\ y=2\,\text{sen}(t) \\ \\ z=2+y \\ z=2+2\,\text{sen}(t) \end{cases}$$



$$\boxed{C: \bar{\beta}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 2+2\,\text{sen}(t))}$$

$A = \bar{\beta}(t_0) = (0, 2, 4)$

$$\begin{cases} 0=\sqrt{2}\cos(t_0) \\ 2=2\,\text{sen}(t_0) \\ 4=2+2\,\text{sen}(t_0) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{t_0=\pi/2}$$

$B = \bar{\beta}(t_1) = (0, -2, 0)$

$$\begin{cases} 0=\sqrt{2}\cos(t_1) \\ -2=2\,\text{sen}(t_1) \\ 0=2+2\,\text{sen}(t_1) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{t_1=\frac{3}{2}\pi}$$

$$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$$

$$\bar{\beta}'(t) = (-\sqrt{2}\,\text{sen}(t), 2\cos(t), 2\cos(t))$$

$$\bar{F} = (x, xy, zy)$$

$$\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} f(\bar{\beta}(t))\,\bar{\beta}'(t)\,dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\cos(t)\,2\,\text{sen}(t), \overbrace{(2+2\,\text{sen}(t))\,2\,\text{sen}(t)}^{4\,\text{sen}(t)+4\,\text{sen}^2(t)})(-\sqrt{2}\,\text{sen}(t), 2\cos, 2\cos)\,dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} -\sqrt{2}\cos(t)\sqrt{2}\,\text{sen}(t) + \sqrt{2}\cos^2(t)\,2^2\,\text{sen}(t) + 4\,\text{sen}(t)\,2\cos(t) + 4\,\text{sen}^2(t)\,2\cos(t)\,dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} 6\cos(t)\,\text{sen}(t) + 4\sqrt{2}\cos^2(t)\,\text{sen}(t) + 8\,\text{sen}^2(t)\cos(t) =$$

$$= 3\,\text{sen}^2(t) - \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos^3(t) + \frac{8}{3}\,\text{sen}^3(t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= \cancel{3} - 0 - \frac{8}{3} - \cancel{3} + 0 - \frac{8}{3} = \boxed{-\frac{16}{3} = \int_C \bar{F}\,d\bar{l}}$$

NOTA

3b) De acuerdo con el resultado obtenido en a) indicar si el campo $\bar{F}$ es conservativo. Justificar claramente

El valor no indica nada en particular

$\text{rot}(\bar{F}) = (z, 0, y) \neq (0,0,0) \rightarrow$ No es irrotacional $\rightarrow \bar{F}$ NO es conservativo

---

E4) Sea $\bar{f}(x,y) = \left(x^3 g'(y), x^4 g(y)\right)$ Hallar $g(y)$ de modo que $\bar{f}$ admita función potencial en $\mathbb{R}^2$, siendo $\bar{f}(1,0) = (2,-4)$.

Hallar la función potencial asociada a $\bar{f}$

Para que $\bar{f}$ admita función potencial $\Rightarrow$ matriz Jac. simétrica

$\Rightarrow \bar{F} = (P, Q) \longrightarrow P'_y = Q'_x$

$$\left.\begin{array}{l} P'_y = x^3 g''(y) \\ Q'_x = 4x^3 g(y) \end{array}\right\} \longrightarrow \cancel{x^3} g''(y) = 4\cancel{x^3} g(y)$$

$$g''(y) - 4g(y) = 0$$

$$r^2 - 4 = 0 \rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -2 \rightarrow \boxed{g(y) = Ae^{2y} + Be^{-2y}}$$

$A, B \in \mathbb{R}$

$\bar{f}(1,0) = (2,-4) = (1^3 g'(0), 1^4 g(0)) \rightarrow \boxed{g'(0) = 2 \quad g(0) = -4}$

$g(0) = -4 = Ae^0 + Be^0 = \boxed{A + B = -4}$

$g'(y) = 2Ae^{2y} - 2Be^{-2y} \rightarrow g'(0) = 2 = 2Ae^0 - 2Be^0 \rightarrow \boxed{1 = A - B}$

$$\boxed{A = -3/2 \quad B = -5/2}$$

$$\boxed{g(y) = -\frac{3}{2}e^{2y} - \frac{5}{2}e^{-2y}}$$

Hallo la función potencial de: $\bar{f}(x,y) = (\underbrace{x^3(-3e^{2y} + 5e^{-2y})}_{\varphi'_x} ; \overbrace{x^4(-\frac{3}{2}e^{2y} - \frac{5}{2}e^{-2y})}^{\varphi'_y})$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi'_x = x^3(-3e^{2y} + 5e^{-2y}) \xrightarrow[\text{en } x]{\text{integro}} \varphi(x,y) = \frac{x^4}{4}(-3e^{2y} + 5e^{-2y}) + \alpha(y) \\ \varphi'_y = x^4(-\frac{3}{2}e^{2y} - \frac{5}{2}e^{-2y}) \ \text{I} \end{array}\right.$$

$\varphi'_y = \frac{x^4}{4}(-6e^{2y} - 10e^{-2y}) + \alpha'(y) =$

$= x^4\left(\frac{-6e^{2y} - 10e^{-2y}}{4}\right) + \alpha'_y = \text{I}$

$\rightarrow \alpha'(y) = 0$

$\alpha(y) = c$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{x^4(-3e^{2y} + 5e^{-2y})}{4} + c}$$

NOTA

AM2	2° parcial Prof. Campello	HOJA N° 3/3 FECHA 2°C 2024

T1 a) Enunciar el teorema de la divergencia

Sea W una región de $\mathbb{R}^3$
S una sup. orientable, suave y cerrada, orientada al exterior
$\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\,vol$$

$$\bar{F} = (P, Q, R) \to \operatorname{div}.(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$$

b) Analizar qué hipótesis debería cumplir un campo $\bar{F}$ para que $\iint_S \operatorname{rot} \bar{F}\, \breve{n}\, d\sigma = 0$ siendo S una sup. cerrada que cumple con las hip. teorema de la divergencia.

$\bar{f} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ pues si es así $\Rightarrow$ las derivadas segundas cruzadas son iguales

Entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\bar{F})) = \operatorname{div}(R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$

$$= \cancel{R''_{yx}} - \cancel{Q''_{zx}} + \cancel{P''_{zy}} - \cancel{R''_{xy}} + \cancel{Q''_{xz}} - \cancel{P''_{yz}} = 0$$

T2 a) Enunciar el teorema de cambio de variables para integrales dobles

D y D^* dos regiones elementales del plano.

$\vec{T}: D^* \to D \;/\; T(D^*) = D \to \bar{T}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

f integrable en D:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\, |J|\, du\,dv$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \longrightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$$

b) A través del cambio de variables definido por $(x,y) = (u + 2v, 2u + v)$ la región D del plano xy se transforma en la región W de uv. Calcular el área de W sabiendo que el área de $D = 12$

$$A_W = \iint_W du\,dv \overset{C.V}{=} \iint_D |J|\, dx\,dy = \frac{1}{3} \underbrace{\iint_D dx\,dy}_{12} = \boxed{4 = A_W}$$

de xy a uv

$$|J_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = |1 - 4| = 3 \to |J| = \frac{1}{3} \leftarrow \text{de } du\,dv \text{ a } dx\,dy$$

NOTA

3b) De acuerdo con el resultado obtenido en a) indicar si el campo $\bar{F}$ es conservativo. Justificar claramente

El valor no indica nada en particular

$\text{rot}(\bar{F}) = (z, 0, y) \neq (0,0,0) \rightarrow$ No es irrotacional $\rightarrow \bar{F}$ NO es conservativo

---

E4) Sea $\bar{f}(x,y) = (x^3 g'(y), x^4 g(y))$ Hallar $g(y)$ de modo que $\bar{f}$ admita función potencial en $\mathbb{R}^2$, siendo $\bar{f}(1,0) = (2,-4)$.

Hallar la función potencial asociada a $\bar{f}$

Para que $\bar{f}$ admita función potencial $\Rightarrow$ matriz Jac. simétrica

$\Rightarrow \bar{f} = (P, Q) \longrightarrow P'_y = Q'_x$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= x^3 g''(y) \\ Q'_x &= 4x^3 g(y) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \cancel{x^3} g''(y) = 4\cancel{x^3} g(y)$$

$$g''(y) - 4g(y) = 0$$

$$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = 2, \; r = -2$$

$$\boxed{g(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\bar{f}(1,0) = (2,-4) = (1^3 \cdot g'(0), 1^4 g(0)) = (g'(0), g(0))$$

$$g'(0) = 2$$

$$g(0) = -4$$

$$g(0) = -4 = Ae^0 + Be^0 = \boxed{A + B = -4}$$

$$g'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

$$g'(0) = 2 = 2Ae^0 - 2Be^0 = \boxed{2A - 2B = 2}$$

$A = -3/2$

$B = -5/2$

$$\boxed{g(x) = -\frac{3}{2}Ae^{2x} - \frac{5}{2}e^{-2x}}$$

NOTA